

CENTRE DES CLASSES PRÉPARATOIRES
LYCÉE TECHNIQUE DE MOHAMMEDIA
ANNÉE SCOLAIRE 2025/2026
COURS DE MATHÉMATIQUES
FILIÈRE MPSI

Vocabulaire de la théorie des ensembles et éléments de logique

Partie II

Auteur : Said MAHARI

Casablanca, le 30 Septembre 2025

TABLE DES MATIÈRES

3. Vocabulaire de la théorie des ensembles et éléments de logique : Partie II	3
1. Vocabulaire de la théorie des ensembles	3
2. Applications	8
3. Notion de famille - Fonction indicatrice	13
3.1 Notion de famille	13
3.2 Fonction indicatrice	14
4. Relations binaires	15
4.1 Notion de relation binaire	15
4.2 Relations d'équivalence	16
4.3 Relations d'ordre	17

CHAPITRE 3.

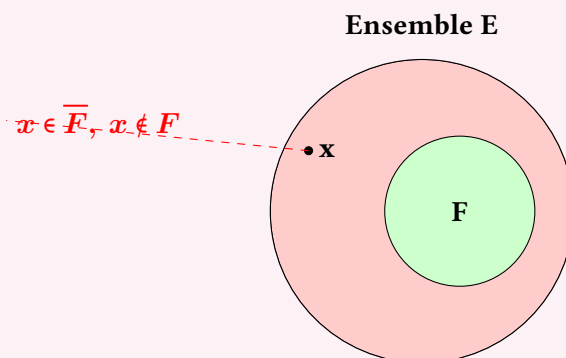
VOCABULAIRE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET ÉLÉMENTS DE
LOGIQUE : PARTIE II

Ce chapitre a été réalisé conformément au programme marocain de mathématiques de la filière MPSI.

1. Vocabulaire de la théorie des ensembles

Définition 1.

- ✎ Un ensemble est une collection d'objets ;
- ✎ Un ensemble qui possède un unique élément x s'appelle singleton et se note $\{x\}$;
- ✎ Si " x est un élément d'un ensemble E " (ou " x appartient à E ") , on note $x \in E$.
- ✎ On dit qu'un ensemble F est "inclus" dans un autre ensemble E si tout élément de F est un élément de E (ceci se traduit par $\forall x \in F, x \in E$: Quelque soit x appartient à F , x appartient à E) et on écrit $F \subset E$. On dit aussi que F est un sous-ensemble (ou une partie) de E .
- ✎ Deux ensembles F et G sont dits égaux si $F \subset G$ et $G \subset F$ et on écrit $F = G$.
- ✎ Si F est une partie d'un ensemble E , l'ensemble $\{x \in E / x \notin F\}$ est appelé complémentaire de F dans E et noté $C_E F$ ou $\overline{F}$.



- Appartenance : $x \in E$
- Non-appartenance : $x \notin F$
- Inclusion : $F \subset E$
- Complémentaire : $\overline{F} = E \setminus F$
- Zone rouge = $\overline{F}$ (contient x)

Exemple 1 .

- ⇒ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des nombres entiers naturels;
- ⇒ $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs;
- ⇒ $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$;
- ⇒ $\mathbb{Z}$ est une partie de $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / (p \in \mathbb{Z}) \wedge (q \in \mathbb{N}^*) \right\}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{Q}$ est une partie de $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels;
- ⇒ $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$, $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$ et l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont des parties de $\mathbb{R}$.
- ⇒ Le complémentaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes imaginaires i.e

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{a + ib / (a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}^*)\}$$

Remarque 1 (Attention!).

A ne faut pas confondre l'ensemble $\{x\}$ et l'élément x .

A tout ensemble E on associe l'ensemble noté $\emptyset_E$ et donné par :

$$\emptyset_E = \{x \in E / x \neq x\}$$

Théorème et Définition 1 .

L'ensemble $\emptyset_E$ est indépendant de E ; on l'appelle ensemble vide et on le note $\emptyset$.

Preuve

Considérons deux ensembles E et F et associons leur $\emptyset_E$ et $\emptyset_F$. L'implication $P \implies Q$ est toujours vraie si $\neg P$ est vraie. On a $\forall x, x = x$, donc $\forall x, x \notin \emptyset_E$, par suite pour tout x l'implication :

$$x \in \emptyset_E \implies x \in \emptyset_F$$

est vraie, d'où $\emptyset_E \subset \emptyset_F$. De même, $\emptyset_F \subset \emptyset_E$. D'où $\emptyset_E = \emptyset_F$.

Remarque 2 .

⇒ $\emptyset \subset E$.

Définition 2.

Soit E un ensemble. L'ensemble $\{X/X \subset E\}$ est appelé ensemble des parties de E qu'on note $\mathcal{P}(E)$.

Remarque 3.

➡ Soit un ensemble E , on a toujours $\emptyset, E \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 2.

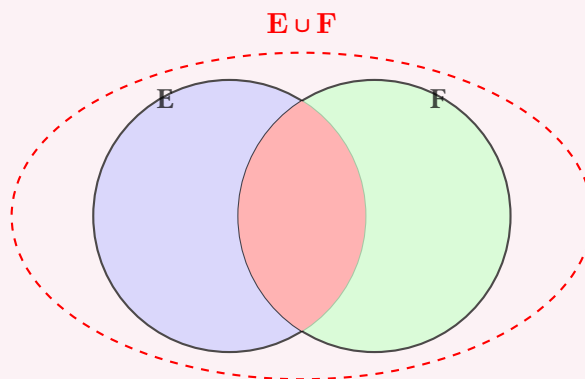
⇒ $E = \{a, b, c\}$ donc,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Définition 3. (Réunion & Intersection)

Soient E et F deux ensembles.

- ✎ L'ensemble $\{x/(x \in E) \vee (x \in F)\}$ s'appelle réunion (ou union) de E et F qu'on note $E \cup F$.
- ✎ L'ensemble $\{x/(x \in E) \wedge (x \in F)\}$ s'appelle intersection de E et F qu'on note $E \cap F$.



- Réunion : $E \cup F$
- Intersection : $E \cap F$

Zone rouge = $E \cap F$

Explications :

- Réunion ($E \cup F$) : Tous les éléments de E ou de F (cadre rouge pointillé)
- Intersection ($E \cap F$) : Éléments communs à E et F (zone rouge)

Exemple 3.

Soit $E = [0, 1[\cup \{\sqrt{2}\} \cup [2, 4]$, et on se donne les parties de E : $A = \{1/2, 3\} \cup [2, 5/2]$ et $B = [1/2, 1[\cup \{\sqrt{2}, 3\}$. Alors on a :

⇒ $A \cup B = [1/2, 1[\cup \{\sqrt{2}\} \cup [2, 5/2] \cup \{3\}$

⇒ $A \cap B = \{1/2, 3\}$

Théorème 1.

Soit Ω un ensemble. Si E, F et G sont des parties de Ω alors on a les propriétés suivantes :

1) Complémentaire

$$\overline{\emptyset} = \Omega; \quad \overline{\Omega} = \emptyset; \quad \overline{\overline{E}} = E; \quad \text{Si } F \subset E \text{ alors } \overline{E} \subset \overline{F}.$$

2) Lois de Morgan

$$C_{\Omega}(E \cup F) = C_{\Omega}E \cap C_{\Omega}F$$

$$C_{\Omega}(E \cap F) = C_{\Omega}E \cup C_{\Omega}F$$

3) Réunion

$$E \cup F = F \cup E; \quad E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap G;$$

$$E \cup E = E; \quad E \cup \emptyset = E; \quad E \cup \Omega = \Omega.$$

4) Intersection

$$E \cap F = F \cap E; \quad E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup G;$$

$$E \cap E = E; \quad E \cap \emptyset = \emptyset; \quad E \cap \Omega = E.$$

5) Réunion et Intersection

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$$

Preuve**1) Complémentaire**

→ Montrons que $\Omega = \overline{\emptyset}$: on a $\forall x \in \Omega, x \notin \emptyset$ et $\forall x \in \overline{\emptyset}, x \notin \emptyset$, donc $\Omega = \overline{\emptyset}$.

→ Montrons que $\overline{\Omega} = \emptyset$: on a $\forall x \in \overline{\Omega}, x \notin \Omega$ et $\forall x \in \emptyset, x \notin \Omega$, donc $\overline{\Omega} = \emptyset$.

→ Montrons que $\overline{\overline{E}} = E$: on a $\forall x \in \overline{\overline{E}}, x \notin \overline{E}$ et $\forall x \in E, x \notin \overline{E}$, donc $\overline{\overline{E}} = E$.

→ Montrons que si $F \subset E$ alors $\overline{E} \subset \overline{F}$: soit $x \in \overline{E}$, donc $x \notin E$ et comme $F \subset E$ alors $x \notin F$, donc $x \in \overline{F}$. D'où $\overline{E} \subset \overline{F}$.

2) Lois de Morgan

→ Montrons que $C_{\Omega}(E \cup F) = C_{\Omega}E \cap C_{\Omega}F$: on a $E \subset E \cup F$ et $F \subset E \cup F$, donc d'après ce qui précède $C_{\Omega}(E \cup F) \subset C_{\Omega}E$ et $C_{\Omega}(E \cup F) \subset C_{\Omega}F$. Inversement, soit $x \in C_{\Omega}E \cap C_{\Omega}F$, donc $x \notin E$ et $x \notin F$, donc $x \notin E \cup F$, donc $x \in C_{\Omega}(E \cup F)$. D'où le résultat.

→ Montrons que $C_{\Omega}(E \cap F) = C_{\Omega}E \cup C_{\Omega}F$: on applique ce qui précède à $C_{\Omega}E \cup C_{\Omega}F$, ce qui donne

$$C_{\Omega}(C_{\Omega}E \cup C_{\Omega}F) = C_{\Omega}(C_{\Omega}E) \cap C_{\Omega}(C_{\Omega}F) = E \cap F$$

D'où $C_\Omega(E \cap F) = C_\Omega E \cup C_\Omega F$.

3) 4) 5) Réunion et Intersection

→ Ces résultats sont immédiats.

Définition 4.

✎ Soit E et F deux ensembles, on appelle produit cartésien de E et F qu'on note $E \times F$, l'ensemble :

$$E \times F = \{(x, y) / (x \in E) \wedge (y \in F)\}.$$

✎ Si p un entier ≥ 2 et $E_1, E_2, \dots, E_p$ des ensembles, de la même façon on définit le produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_p$,

$$E_1 \times \dots \times E_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) / (x_1 \in E_1) \wedge (x_2 \in E_2) \wedge \dots \wedge (x_p \in E_p)\}.$$

✎ Un élément $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ s'appelle p -uplet.

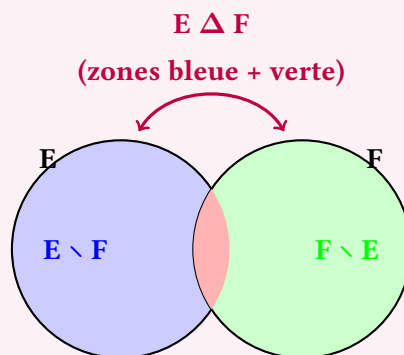
Définition 5.

✎ On appelle différence des ensembles E et F pris dans cet ordre l'ensemble noté $E \setminus F$ et défini par :

$$E \setminus F = \{x \in E / x \notin F\}.$$

✎ On appelle différence symétrique des ensembles E et F l'ensemble noté $E \Delta F$ et défini par

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$



Zone bleue = $E \setminus F$

Zone verte = $F \setminus E$

Zone rouge = $E \cap F$

Explications :

- $E \setminus F$: Éléments de E qui ne sont pas dans F
- $F \setminus E$: Éléments de F qui ne sont pas dans E
- $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$

Exemple 4 .

$$\Leftrightarrow \mathbf{C}_E F = E \setminus F$$

$$\Leftrightarrow E \Delta \emptyset = E$$

2. Applications

Définition 6. (Application)

Soient E et F deux ensembles. On appelle application de E dans F , une correspondance f qui à chaque élément x de E associe un élément et un seul y de F .

E est appelé ensemble de départ de l'application;

F est appelé ensemble d'arrivée de l'application;

y est appelé image de x par l'application. On écrit $y = f(x)$;

x est appelé antécédent de y par l'application;

L'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) / x \in E\}$ est appelé graphe de l'application f et on le note $\text{gr}(f)$.

$$\begin{array}{lcl} \text{Notation :} & E & \xrightarrow{f} F \\ & x & \mapsto f(x) \end{array}$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E .

Exemple 5 .

L'application $\text{Id}_E : E \longrightarrow E$ s'appelle l'application *identité* dans E .

$$x \mapsto x$$

$E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application, où $E(x) := \max\{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$ qui s'appelle la *partie entière* de x .

$$x \mapsto E(x)$$

Une application du type $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, n \mapsto u_n$ s'appelle *suite à valeurs réelles* qu'on note brièvement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 7.

Soient E et F deux ensembles. On appelle fonction de E dans F , une correspondance qui à chaque élément x de E associe au plus un élément y de F . Si on désigne par f la fonction, il existe une partie D de E , appelée domaine de définition de f donnée par :

$$D = \{x \in E / \exists y \in F, y = f(x)\}$$

telle que

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

soit une application. L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Exemple 6 .

Voici quelques fonctions :

⇒ La fonction $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a pour domaine de définition $D_{f_1} = \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

⇒ La fonction $f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a pour domaine de définition $D_{f_2} = \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$z \longmapsto \frac{z^2}{1-z}$$

⇒ La fonction $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ a pour domaine de définition $D_{f_3} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$$x \longmapsto \frac{x}{\ln x}$$

⇒ La fonction $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a pour domaine de définition $D_{f_4} =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^*$

$$(x, y) \longmapsto \frac{\ln x}{y}$$

⇒ La fonction $f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a pour domaine de définition l'ensemble :

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{1}{1-x}, \frac{1}{y^2+z^2} \right)$$

$$D_{f_5} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x \neq 1) \wedge ((y, z) \neq (0, 0))\}$$

Définition 8.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- ✎ Soit A une partie de E . L'ensemble $\{f(x) \in F / x \in A\}$ se note $f(A)$ et s'appelle image directe de A .
- ✎ Soit B une partie de F . L'ensemble $\{x \in E / f(x) \in B\}$ se note $f^{-1}(B)$ et s'appelle image réciproque de B .
- ✎ Si D une partie de E , l'application

$$\begin{aligned} D &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

s'appelle restriction de f à la partie D , qu'on note $f|_D$.

✎ Inversement, si on note $f_1 = f|_D$, f s'appelle prolongement de f_1 sur E .

✎ Soient D une partie de E et C une partie de F tels que $\forall x \in D, f(x) \in C$. L'application

$$\begin{aligned} D &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

s'appelle application induite de f .

✎ Soit $g : F \longrightarrow G$ une application. L'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

s'appelle application composée de f et g dans cet ordre et se note $g \circ f$.

Exemple 7 .

Si on note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto E(x)$ l'application partie entière, on a :

- ⇒ $gr(f) = \{(x, E(x)) / x \in \mathbb{R}\}.$
- ⇒ $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{N}$ (où $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$).
- ⇒ $f^{-1}(\{0\}) = [0, 1[.$
- ⇒ $f|_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R}^-) = \{0\}$ (où $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$).
- ⇒ $f([\sqrt{2}, 2[) = \{1\}.$
- ⇒ $f^{-1}([\sqrt{2}, 2[) = \emptyset.$

Exemple 8 .

Si on note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$, on a :

- ⇒ $gr(g) = \{(x, e^x) / x \in \mathbb{R}\}.$
- ⇒ $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*.$
- ⇒ $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$
- ⇒ $g(\mathbb{R}^-) =]0, 1[.$
- ⇒ $g^{-1}(\mathbb{R}^-) = \emptyset.$

Définition 9.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

✎ On dit que f est injective si tout élément de F possède au plus un antécédent. Autrement dit,

$$\forall (x, x') \in E^2 (= E \times E), (f(x) = f(x') \implies x = x')$$

Ou encore,

$$\forall (x, x') \in E^2 (= E \times E), (x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'))$$

✎ On dit que f est surjective si tout élément de F possède au moins un antécédent. Autrement dit,

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

✎ On dit que f est bijjective si tout élément de F possède un antécédent et un seul. Autrement dit,

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$$

Exemple 9 .

- ⇒ L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto E(x)$ partie entière est surjective et non injective.
- ⇒ L'application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^2$ est injective et non surjective.
- ⇒ L'application $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*, (p, q) \mapsto 2^p(2q+1)$ est bijective (voir exercice 07 de TD01 pour la surjectivité).
- ⇒ L'application $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto e^x$ est bijective.
- ⇒ L'application $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + \frac{1}{z}$ est non injective et surjective.

Proposition 1 .

- 1) Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.
- 2) Soit f une application bijective de E dans F . L'application, notée f^{-1} , de F dans E qui à tout élément de y de F lui associe l'unique élément x de E tel que $f(x) = y$ est une bijection de F dans E , appelée bijection réciproque de f ,

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x \text{ tel que } f(x) = y \end{aligned}$$

- 3) f^{-1} est l'unique application vérifiant :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad ; \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$$

Preuve

- 1) Le premier point est immédiat.
- 2) Montrons que f^{-1} est une bijection :

→ Soient $y, y' \in F$. Il existe $x, x' \in E$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Donc si $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y')$ alors $x \neq x'$, donc $y \neq y'$ (car f est bijective donc injective). D'où f^{-1} est bien définie.

→ Soient $y, y' \in F$ tels que $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$. Il existe $x, x' \in E$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Si $x = x'$ alors $y = y'$ (car f est une application). D'où f^{-1} est injective.

→ Soit $x \in E$, on a $f(x) \in F$ est un antécédent par f^{-1} de x . Ainsi, on a montré que f^{-1} est bijective.

3) Montrons que f^{-1} est unique et qu'on a $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$:

→ Soit $x \in E$ et posons $f(x) = y$, comme f est bijective y parcourt F lorsque x parcourt E . On a :

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x \quad \text{ET} \quad f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y$$

d'où $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

→ Soit g une autre application vérifiant les mêmes propriétés que f^{-1} . Soit $y \in F$, donc il existe un unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ (car f est bijective) (par définition de $f^{-1} : f^{-1}(y) = x$). Or, $g \circ f = \text{Id}_E$, donc $g(y) = g(f(x)) = x = f^{-1}(y)$ ceci quelque soit y de F . D'où l'unicité de f^{-1} .

Proposition 2 .

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Alors :

- 1) Si les applications f et g sont injectives alors la composée $g \circ f$ l'est aussi.
- 2) Si les applications f et g sont surjectives alors la composée $g \circ f$ l'est aussi.
- 3) Si les applications f et g sont bijectives alors la composée $g \circ f$ l'est aussi et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Exemple 10 .

On considère les applications suivantes :

$$g_1 : [0, 1[\rightarrow [0, 1[\quad ; \quad g_2 : [0, 1[\rightarrow [1, 2[\quad ; \quad g_3 : [1, 2[\rightarrow]1, 2]$$

$$t \mapsto \sqrt{t} \quad \quad \quad t \mapsto 1+t \quad \quad \quad t \mapsto 2/t$$

$$g_4 :]1, 2] \rightarrow]0, 1] \quad ; \quad g_5 :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^- \quad ; \quad g : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^-$$

$$t \mapsto t-1 \quad \quad \quad t \mapsto \ln t \quad \quad \quad t \mapsto \ln \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$$

On a :

$$g = g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$$

Toutes ces applications sont bijectives et on a :

$$g^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_3^{-1} \circ g_4^{-1} \circ g_5^{-1}$$

3. Notion de famille - Fonction indicatrice

3.1 Notion de famille

Soit I un ensemble, non vide, dont les éléments seront appelés indices. Soit E un ensemble.

Définition 10.

Toute application x de I vers E est appelée une famille d'éléments de E , indexée par I .
 Pour $i \in I$, on note x_i plutôt que $x(i)$, et on écrit $(x_i)_{i \in I}$ cette famille d'éléments de E .
 On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I .

Exemple 11.

Voici quelques familles de nombres et d'ensembles :

- $\Rightarrow \mathbb{C} = (z_z)_{z \in \mathbb{C}} = (z)_{z \in \mathbb{C}}$ famille de nombres complexes (c'est une famille infinie)
- $\Rightarrow \mathbb{U} = (e^{i\theta})_{\theta \in \mathbb{R}}$ famille des nombres complexes de module 1 (c'est une famille infinie)
- $\Rightarrow \mathbb{U}_n = (e^{i\frac{2k\pi}{n}})_{0 \leq k \leq n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) famille des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (c'est une famille finie)
- $\Rightarrow \mathbb{R} = (x_x)_{x \in \mathbb{R}} = (x)_{x \in \mathbb{R}}$ famille des nombres réels (c'est une famille infinie).
- $\Rightarrow$ Soit E un ensemble. $\mathcal{P}(E) = (X)_{X \in \mathcal{P}(E)}$ famille des parties de E (c'est une famille infinie ou finie).
- $\Rightarrow ([a, b])_{\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a \leq b\}}$ famille des segments de $\mathbb{R}$ (c'est une famille infinie).
- $\Rightarrow (D(a, r))_{\{(a,r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*\}}$ famille des disques ouverts de $\mathbb{C}$ (c'est une famille infinie).

Définition 11. (Réunion & Intersection)

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles.

- $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i = \{x / \exists i \in I, x \in E_i\}$
- $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} E_i = \{x / \forall i \in I, x \in E_i\}$

Remarque 4.

$$x \in \bigcup_{i \in I} E_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in E_i ;$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} E_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in E_i$$

Exemple 12.

- $\Rightarrow \bigcup_{a>0} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \bigcap_{a>0} [a, +\infty[= \emptyset \\
&\Leftrightarrow \bigcap_{a<0} [a, +\infty[= \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [1, n] = \mathbb{N}^* \\
&\Leftrightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [1, n] = \{1\} \\
&\Leftrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, n \right] =]0, +\infty[\\
&\Leftrightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, n \right] = \{1\}
\end{aligned}$$

Proposition 3 .

Soient $(E_i)_{i \in I}, (F_j)_{j \in J}$ deux familles d'ensembles et E un ensemble. Alors on a :

$$\begin{aligned}
E \cup \left(\bigcap_{i \in I} E_i \right) &= \bigcap_{i \in I} (E \cup E_i) & ; & \quad E \cap \left(\bigcup_{i \in I} E_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E \cap E_i) \\
\left(\bigcap_{i \in I} E_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} F_j \right) &= \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (E_i \cup F_j) & ; & \quad \left(\bigcup_{i \in I} E_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} F_j \right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (E_i \cap F_j)
\end{aligned}$$

3.2 Fonction indicatrice**Définition 12.**

Soit Ω un ensemble et A une partie de Ω . On appelle fonction indicatrice de A (ou caractéristique) l'application notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_A : \Omega &\longrightarrow \{0, 1\} \\
x &\longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Exemple 13 .

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \mathbb{1}_{\emptyset} = 0 \quad ; \quad \mathbb{1}_{\Omega} = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{Soit } x \in \mathbb{R}. \text{ On a : } |x| = x (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x)) \\
&\Leftrightarrow \text{Soit } A \text{ une partie de } \Omega. \text{ On a : } \mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A
\end{aligned}$$

4. Relations binaires

Dans ce paragraphe, E désigne un ensemble non vide.

4.1 Notion de relation binaire

Définition 13. (Relation binaire)

- ✎ On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur E une partie Γ du produit cartésien $E \times E$.
La partie Γ est dite graphe de la relation $\mathcal{R}$.
- ✎ On dit qu'un élément x de E est en relation avec un autre élément y de E si $(x, y) \in \Gamma$ et on écrit :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma$$

Exemple 14.

- 1) La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation binaire :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$$

- 2) La relation de congruence modulo α ($\alpha \in \mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y [\alpha] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y - x = k\alpha$$

Cas particulier : lorsque $\alpha = 0$, on obtient la relation d'égalité sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$$

Le graphe cette relation est l'ensemble : $\{(x, x) / x \in \mathbb{R}\}$.

- 3) La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / b = ak$$

Le graphe de cette relation est l'ensemble : $\{(a, ak) / (a, k) \in \mathbb{Z}^2\}$.

- 4) La relation $\leq$ inférieur ou égal sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$$

Le graphe de cette relation est l'ensemble : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$.

- 5) La relation $>$ supérieur strictement sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x > y$$

Le graphe de cette relation est l'ensemble : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > y\}$.

- 6) La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

Le graphe de cette relation est l'ensemble : $\{(\rho e^{i\theta}, \rho e^{i\theta'}) / (\rho, \theta, \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0)\}$.

Définition 14.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E .

✎ On dit que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive si :

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x$$

✎ On dit que la relation $\mathcal{R}$ est symétrique si :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x)$$

✎ On dit que la relation $\mathcal{R}$ est anti-symétrique si :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \implies y = x)$$

✎ On dit que la relation $\mathcal{R}$ est transitive si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z)$$

Exemple 15 .

On reprend les relations binaires définies dans l'exemple 12.

- ⇒ La relation définie en (1) est réflexive, anti-symétrique, transitive et non symétrique
- ⇒ La relation définie en (2) est réflexive, symétrique, transitive et non anti-symétrique.
- ⇒ La relation définie en (3) est réflexive, transitive, non symétrique et non anti-symétrique.
- ⇒ La relation définie en (4) est réflexive, anti-symétrique et transitive et non symétrique.
- ⇒ La relation définie en (5) est transitive, non réflexive, non symétrique et anti-symétrique.
- ⇒ La relation définie en (6) est réflexive, symétrique et transitive et non anti-symétrique.

4.2 Relations d'équivalence**Définition 15.**

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 16 .

On reprend les relations binaires définies dans l'exemple 12.

- ⇒ La relation définie en (1) n'est pas une relation d'équivalence.
- ⇒ La relation définie en (2) est une relation d'équivalence.

- ⇒ La relation définie en (3) n'est pas une relation d'équivalence.
- ⇒ La relation définie en (4) n'est pas une relation d'équivalence.
- ⇒ La relation définie en (5) n'est pas une relation d'équivalence.
- ⇒ La relation définie en (6) est une relation d'équivalence.

4.3 Relations d'ordre

Définition 16.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E .

- ⇒ On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, anti-symétrique et transitive.
On dit, dans ce cas, que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.
- ⇒ On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total si elle vérifie de plus :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x)$$

- ⇒ Sinon, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel.

Exemple 17 .

On reprend les relations binaires définies dans l'exemple 12.

- ⇒ La relation définie en (1) est d'ordre partiel.
- ⇒ La relation définie en (2) n'est pas une relation d'ordre.
- ⇒ La relation définie en (3) n'est pas une relation d'ordre et une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$.
- ⇒ La relation définie en (4) est d'ordre total sur $\mathbb{R}$ et partiel sur $\mathbb{C}$.
- ⇒ La relation définie en (5) n'est pas d'ordre.
- ⇒ La relation définie en (6) n'est pas d'ordre.

Dans la suite on notera toute relation d'ordre par $\leq$, et donc $(E, \leq)$ sera un ensemble ordonné.

Définition 17.

Soit A une partie de E .

- ⇒ On dit que $m \in E$ (respectivement $M \in E$) est un minorant (respectivement majorant) de A si et seulement si :

$$\forall x \in A, m \leq x \text{ (respectivement } x \leq M)$$

- ⇒ On dit que $m \in E$ (respectivement $M \in E$) est un minimum (respectivement maximum) de A si :

$$\begin{cases} m \text{ minorant (respectivement } M \text{ majorant) de } A \\ m \in A \text{ (respectivement } M \in A) \end{cases}$$

Exemple 18 .

- ⇒ Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, l'ensemble vide $\emptyset$ est un minimum et l'ensemble E est un maximum de $\mathcal{P}(E)$.
- ⇒ Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et on considère $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Soit $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$.
 - L'ensemble vide $\emptyset$ est un minimum de A .
 - A n'admet pas de maximum mais il admet des majorants à savoir E et $\{a, b, c\}$.
- ⇒ Dans $(\mathbb{C}, \leq)$ (il s'agit d'une relation d'ordre partiel), on considère les ensembles $A = \{1, -3, i, \sqrt{2}\}$ et $B = \mathbb{Q} \cap]0, 1]$.
 - A n'admet ni minorant ni majorant.
 - Tout élément de $\mathbb{R}^-$ est un minorant de B et B n'admet pas de minimum.
 - Tout élément de $[1, +\infty[$ est un majorant de B et 1 est un maximum de B .

Proposition 4 .

Le maximum et le minimum sont uniques s'ils existent.