Centre des classes préparatoires
Lycée technique de Mohammedia
Année Scolaire 2025/2026
Cours de mathématiques
Filière MPSI

Vocabulaire de la théorie des ensembles et éléments de logique

Partie I

Auteur : **Said MAHARI**

Casablanca, le 28 septembre 2025

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1.

VOCABULAIRE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET ÉLÉMENTS DE LOGIQUE : PARTIE I

Ce chapitre a été réalisé conformément au programme marocain de mathématiques de la filière MPSI.

1. Opérations logiques élémentaires

1.1 La négation

A chaque expression A (affirmation - propriété - assertion) relative à un domaine donné, on associe la valeur "Vraie" ou "Fausse". S'il s'agit de son contraire ou sa négation, on note ¬A.

Table de vérité de la négation :

A	$\neg A$
V	F
F	V

ou

A	$\neg A$
1	0
0	1

Exemple 1 .

Soit $(x, a) \in \mathbb{R}^2$.

✓ **La négation de $(x = a)$ est $(x \neq a)$.**

✓ **La négation de $(x > a)$ est $(x \leq a)$.**

✓ **La négation de (Quelque soit x de $\mathbb{R}$, x vérifie $x^2 \geq 0$) est (Il existe x de $\mathbb{R}$ tel que $x^2 < 0$).**

1.2 La conjonction

A partir de deux affirmations A et B, on peut former l'affirmation "A et B" que l'on note A ∧ B.

Table de vérité de la conjonction :

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ou

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple 2 .

Soit $x \in \mathbb{C}$.

✓ $(x^2 + x + 1 = 0) \wedge (\arg(x) = \dfrac{2\pi}{3})$ donne $x = j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1.3 La disjonction

A partir de deux affirmations A et B, on peut former l'affirmation "A ou B" que l'on note A $\vee$ B.

Table de vérité de la disjonction :

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple 3 .

Soit $x \in \mathbb{C}$.

✓ $(x^2 - x = 0)$ donne $(x = 0) \vee (x = 1)$.

1.4 L'implication

A partir de deux affirmations A et B, on peut former l'affirmation "A implique B" que l'on note A $\Longrightarrow$ B.

Table de vérité de l'implication :

A	B	$A \Longrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ou

A	B	$A \Longrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemple 4 .

✓ Dans $\mathbb{C}$, $xy = 0 \implies (x = 0) \vee (y = 0)$.

1.5 L'équivalence

A partir de deux affirmations A et B, on peut former l'affirmation "A équivaut à B" que l'on note A $\Leftrightarrow$ B.

Table de vérité de l'équivalence :

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ou

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemple 5 .

✓ M est un point du cercle $\mathscr{C}(O, R)$ $\Leftrightarrow$ OM = R.

Remarque 1 (hors programme).

✔ " $\vee$ ", " $\wedge$ ", " $\implies$ ", " $\Leftrightarrow$ ", "NAND", "XOR", et "NOR" sont appelés aussi des connecteurs logiques.

✔ A partir de ces opérations logiques élémentaires, on peut former d'autres à savoir $NAND$, XOR, et NOR...etc.

✔ Ces opérations peuvent se traduire aussi par un calcul dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par exemple le "et" se traduit par la multiplication dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et "XOR" par la somme dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Voici les opérations de calcul dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

Somme dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
$\overset{\curvearrowright}{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

Multiplication dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
$\overset{\curvearrowright}{\times}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Pour plus de détails, consultez les liens : lien 1 et lien 2.

1.6 Propriétés

Théorème 1 .

Soient A, B et C trois affirmations. Alors on a :

1) $\neg(\neg A) \equiv A$
2) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (associativité de $\wedge$)
3) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (associativité de $\vee$)
4) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (commutativité de $\wedge$)
5) $A \vee B \equiv B \vee A$ (commutativité de $\vee$)
6) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (distributivité)
7) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (distributivité)
8) $A \wedge A \equiv A$
9) $A \vee A \equiv A$
10) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$ (loi de Morgan)
11) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$ (loi de Morgan)
12) $A \implies B \equiv (\neg A) \vee B$
13) $A \implies B \equiv ((\neg B) \implies (\neg A))$ (principe de la contraposée)
14) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \implies B) \wedge (B \implies A)$ (principe de la double implication)
15) $(A \vee B) \implies C \equiv (A \implies C) \wedge (B \implies C)$
16) $\neg(A \implies B) \equiv A \wedge (\neg B)$
17) $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Leftrightarrow (\neg B)) \equiv ((\neg A) \Leftrightarrow B)$

Proposition 1 (Quelques tautologies).

Soient A, B et C trois affirmations. Les formules suivantes sont des tautologies :

1) $A \vee (\neg A)$ (principe du tiers exclus)
2) $A \implies A$
3) $A \equiv A$
4) $A \implies (A \vee B)$
5) $(A \wedge B) \implies A$
6) $(A \wedge (A \implies B)) \implies B$
7) $(A \implies B) \wedge (B \implies C) \implies (A \implies C)$ (transitivité de $\implies$)

Exercice 1 :.

Nier les expressions suivantes :

1) $((A \Longrightarrow B) \wedge C) \vee (\neg B)$

2) $((A \Longrightarrow B) \wedge C) \Longrightarrow B$

Réponse :.

Niions les expressions proposées :

1) **On a :**

$$\begin{aligned}
\neg[((A \Longrightarrow B) \wedge C) \vee (\neg B)] &\equiv \neg[((A \Longrightarrow B) \vee (\neg B)) \wedge (C \vee (\neg B))] \\
&\equiv \neg[((\neg A) \vee B) \vee (\neg B)) \wedge (C \vee (\neg B))] \\
&\equiv \neg(C \vee (\neg B)) \\
&\equiv (\neg C) \wedge B
\end{aligned}$$

2) **On a :**

$$\begin{aligned}
\neg(((A \Longrightarrow B) \wedge C) \Longrightarrow B) &\equiv \neg(\neg((A \Longrightarrow B) \wedge C) \vee B) \\
&\equiv ((A \Longrightarrow B) \wedge C) \wedge (\neg B) \\
&\equiv (((\neg A) \vee B) \wedge C)) \wedge (\neg B) \\
&\equiv (((\neg A) \wedge C) \vee (B \wedge C)) \wedge (\neg B) \\
&\equiv [((\neg A) \wedge C) \wedge (\neg B)] \vee [(B \wedge C) \wedge (\neg B)] \\
&\equiv (\neg A) \wedge C \wedge (\neg B)
\end{aligned}$$

1.7 Quantificateurs

Soit $\mathcal{R}(x)$ une assertion dépendant d'une variable x. On écrit $(\exists x / \mathcal{R}(x))$ pour dire qu'il existe au moins un des objets x pour lequel $\mathcal{R}(x)$ est vraie.

Exemple 6 .

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

- ✓ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 (\forall x \in \mathbb{R})(|x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$ **exprime la continuité de f en x_0.**
- ✓ $\exists \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0 (\forall x \in \mathbb{R})(|x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$ **exprime que f est constante au voisinage de x_0.**
- ✓ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Longrightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon)$ **exprime que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'élément a.**
- ✓ $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$ **exprime le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.**

Proposition 2 (Règles de distributivité).

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux expressions dépendant d'une variable x. On a :

1) $\forall x,\ (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x,\ P(x)) \wedge (\forall x,\ Q(x))$
2) $\exists x,\ (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x,\ P(x)) \vee (\exists x,\ Q(x))$

Exercice 2 :.

A-t-on :

1) $\forall x,\ (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall x,\ P(x)) \vee (\forall x,\ Q(x))$?
2) $\exists x,\ (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x,\ P(x)) \wedge (\exists x,\ Q(x))$?

Proposition 3 .

Soit $P(x)$ une expression dépendant d'une variable x et Q ne l'est pas. On a :

1) $\forall x,\ (P(x) \vee Q) \equiv (\forall x,\ P(x)) \vee (\forall x,\ Q)$
2) $\exists x,\ (P(x) \wedge Q) \equiv (\exists x,\ P(x)) \wedge (\exists x,\ Q)$

Proposition 4 (Quantification d'une implication).

1) **Si la propriété P ne dépend pas de x,**
   (a) $\forall x,\ (P \implies Q(x)) \equiv P \implies (\forall x,\ Q(x))$
   (b) $\exists x,\ (P \implies Q(x)) \equiv P \implies (\exists x,\ Q(x))$
2) **Si la propriété Q ne dépend pas de x,**
   (a) $\forall x,\ (P(x) \implies Q) \equiv (\forall x,\ P(x)) \implies Q$
   (b) $\exists x,\ (P(x) \implies Q) \equiv (\forall x,\ P(x)) \implies Q$

Proposition 5 (Négation des quantificateurs).

Soit $P(x)$ une expression dépendant d'une variable x. On a :

1) $\neg(\forall x,\ P(x)) \equiv (\exists x,\ \neg P(x))$
2) $\neg(\exists x,\ P(x)) \equiv (\forall x,\ \neg P(x))$

2. Types de raisonnement

2.1 Raisonnement par les équivalences successives

Pour démontrer qu'une propriété P est vraie, on démontre des fois qu'elle est équivalente à une propriété qu'on sait qu'elle est vraie à l'avance.

Exemple 7 .

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$:
Procédons par des équivalences successives. On a :

$$\begin{aligned} ab \leq \frac{a+b}{2} &\Leftrightarrow 2ab \leq a^2+b^2 \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

La dernière expression équivalente est vraie, on conclut alors que $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Exemple 8 .

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$:
Procédons par des équivalences successives. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} &\Leftrightarrow (1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = 1-a^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (1-a)a^k = 1-a^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (a^k - a^{k+1}) = 1-a^{n+1} \\ &\Leftrightarrow a^0 - a^{n+1} = 1-a^{n+1} \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

2.2 Raisonnement par disjonction des cas

Pour démontrer qu'une propriété est vraie, on considère tous les cas possibles et on vérifie qu'elle est vraie dans chacun des cas possibles.

Exemple 9 .

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair : Soit n un entier naturel et considérons tous les cas possibles :

- Cas 1 : Si n est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$, donc $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2 \times k(2k+1)$, et par suite, $n(n+1)$ est pair.
- Cas 2 : Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$, donc $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2 \times (2k+1)(k+1)$, et par suite, $n(n+1)$ est pair.

  D'où $n(n+1)$ est pair pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exemple 10 .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x^2 + x + 1 \geq 0$

- Cas 1 : Si $x \leq -1$ alors $x \leq 0$ et $x + 1 \leq 0$, donc $x(x+1) \geq 0$ et par suite, $x^2 + x + 1 \geq 1 > 0$.
- Cas 2 : Si $x \geq -1$ alors $x + 1 \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + x + 1 \geq 0$.

D'où :

$$x^2 + x + 1 \geq 0$$

2.3 Raisonnement par contre-exemple

Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x. Pour montrer que l'affirmation $(\forall x,\ P(x))$ est fausse, on démontre que sa négation $(\exists x,\ \neg P(x))$ est vraie.

Exemple 11 .

La propriété suivante est-elle vraie : "deux rectangles de même aire ont même périmètre" ?
Les rectangles de longueurs respectives $4m$ et $2m$ et de largeurs respectives $0,5m$ et $1m$ constituent un contre-exemple.

Exemple 12 .

L'affirmation $(\forall x \in \mathbb{C},\ x^2 \geq 0)$ est fausse puisque les nombres complexes i et j constituent des contre-exemples.

Exemple 13 .

L'affirmation $(\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b})$ est fausse puisque $a = 9$ et $b = 16$ constituent un contre-exemple.

2.4 Raisonnement par l'absurde

Première forme :.

L'implication $A \Longrightarrow B$ se traduit par $(\neg A) \vee B$. En général, on prend A comme hypothèse et on démontre B. Mais dans le raisonnement par l'absurde, on prend comme hypothèse $A \wedge (\neg B)$ et on aboutit à une contradiction.

Exemple 14 .

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons que si $z = 0$ alors $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z) = 0$:
Raisonnons par absurde en supposant que $z = 0$ et ($\mathcal{R}e(z) \neq 0$ ou $\mathcal{I}m(z) \neq 0$).
$z = 0$ donne $\mathcal{R}e(z) = -i\mathcal{I}m(z)$, donc $(\mathcal{R}e(z))^2 = -(\mathcal{I}m(z))^2$, et par suite, $(\mathcal{R}e(z))^2 + (\mathcal{I}m(z))^2 = 0$. Or $\mathcal{R}e(z) \neq 0$ ou $\mathcal{I}m(z) \neq 0$ donc $(\mathcal{R}e(z))^2 + (\mathcal{I}m(z))^2 > 0$. Contradiction.
Conclusion : si $z = 0$ alors $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z) = 0$.

Exemple 15 .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n l'est aussi :
Raisonnons par absurde en supposant que n^2 est pair et n ne l'est pas. Donc n est impair, et par suite, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$, donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, donc n^2 est impair. Contradiction.
Conclusion : si n^2 est pair alors n est aussi pair.

Exemple 16 .

Soient $a, b > 0$. Montrons que si $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$ alors $a = b$:
Raisonnons par absurde en supposant que $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$ et $a \neq b$. Comme $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$ alors $a(1+b) = b(1+a)$ donc $a + ab = b + ab$ d'où $a = b$. Cela conduit une contradiction.
Conclusion : si $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$ alors $a = b$.

Exemple 17 .

Soit $(k, k') \in \mathbb{N}^2$. Montrons par absurde que si $kk' = 1$ alors $k = k' = 1$:
Supposons alors que $kk' = 1$ et ($k \neq 1$ ou $k' \neq 1$).

→ Si $k = 0$ ou $k' = 0$ alors $kk' = 0 \neq 1$. Contradiction.

→ Sinon, comme ($k \neq 1$ ou $k' \neq 1$) alors ($k \geq 2$ ou $k' \geq 2$), donc $kk' \geq 2$, donc $kk' \neq 1$. Contradiction.

Conclusion : si $kk' = 1$ alors $k = k' = 1$.

Deuxième forme :.

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x. Cette forme est utilisée lorsqu'il s'agit de démontrer qu'il n'existe aucun objet x tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie en supposant qu'il existe un tel x et aboutir à une contradiction par la suite.

Exemple 18 .

Considérons l'assertion $\mathcal{P}(x)$: "Il n'existe aucun x de $\mathbb{R}$ tel que $x^2 \leq 4$ et $1,5 \leq \sqrt{|x|}$".
Supposons qu'il existe un tel x alors $x^2 \leq 4$ et $\underset{\simeq 5,06}{(1,5)^4} \leq |x|^2$ alors 4 est supérieur à 5, ce qui est impossible.
D'où la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

2.5 Raisonnement par contraposée

Comme on a déjà mentionné l'implication $A \implies B$ se traduit par $(\neg A) \vee B$ qui est la même chose que $(\neg(\neg B)) \vee (\neg A)$ et qui se traduit par $(\neg B) \implies (\neg A)$.

$$A \implies B \equiv (\neg B) \implies (\neg A)$$

Il s'agit alors dans le raisonnement par contraposée de démontrer l'implication équivalente.

Exemple 19 .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que si n^2 est pair alors n l'est aussi :
Raisonnons par contraposée, supposons que n est impair et montrons que n^2 l'est aussi. Donc il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$, par suite $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, d'où n^2 est impair.
Ainsi, si n^2 est pair alors n l'est aussi.

Exemple 20 .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que si pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$ alors $x = 0$:
Raisonnons par contraposée, supposons que $x \neq 0$ et montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| > \varepsilon$. Si on prend $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2} > 0$ alors $|x| > \varepsilon$. D'où :

$$\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon \implies x = 0$$

Exemple 21 .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que :

$$\left(\forall m \in \mathbb{N},\ n^2 - 1 \neq 8m\right) \implies (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k)$$

La contraposée s'écrit :

$$(\forall k \in \mathbb{N},\ n \neq 2k) \implies (\exists m \in \mathbb{N},\ n^2 - 1 = 8m)$$

Si on suppose $(\forall k \in \mathbb{N},\ n \neq 2k)$ alors n est impair, donc il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$, donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$. Or, $k(k+1)$ est pair (d'après l'exemple 9) donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k(k+1) = 2m$ et par suite $n^2 = 8m + 1$ donc $n^2 - 1 = 8m$. D'où :

$$(\forall m \in \mathbb{N},\ n^2 - 1 \neq 8m) \implies (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k)$$

Exemple 22 .

Soient $x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 1)$ et M des réels. Montrons que :

$$x_1 + \cdots + x_n = M \implies \exists i \in [\![1, n]\!],\ x_i \geq \frac{M}{n}$$

La contraposée s'écrit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i < \frac{M}{n} \implies x_1 + \cdots + x_n \neq M$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{n} = M$, par suite $\sum_{i=1}^{n} x_i \neq M$. D'où :

$$x_1 + \cdots + x_n = M \implies \exists i \in [\![1, n]\!],\ x_i \geq \frac{M}{n}$$

2.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est un type de raisonnement mathématique permettant de démontrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant des propriétés données. Il se décompose en deux parties :

- L'analyse : on suppose que l'objet existe et on essaie de trouver des conditions nécessaires que doit vérifier cet objet. Ce faisant, on prouve que si l'objet existe, alors il est nécessairement égal à un certain objet x_0 (ceci assure l'unicité).
- La synthèse : on considère l'objet x_0 identifié dans la partie analyse, et on vérifie qu'il a bien les propriétés voulues (ceci assure l'existence).

Exemple 23 .

Montrons que toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une application paire et une autre impaire :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et procédons par analyse-synthèse :

- Analyse : supposons qu'il existe deux applications $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que g est paire, h est impaire et $f = g + h$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \\ h(x) = \dfrac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \end{cases}$$

D'où l'unicité de l'écriture.

— **Synthèse : pour $x \in \mathbb{R}$, posons :**

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \\ h(x) = \dfrac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \end{cases}$$

Alors on a bien :

- ☞ $f = g + h$
- ☞ g **est paire**
- ☞ h **est impaire**

D'où l'existence de l'écriture.

2.7 Raisonnement par récurrence

Théorème 2 (Propriétés de $\mathbb{N}$).

L'ensemble des entiers naturels possède les propriétés suivantes :
(N1) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
(N2) Toute partie non vide $\mathbb{N}$ et majorée possède un plus grand élément.
(N3) L'ensemble $\mathbb{N}$ lui-même n'est pas majoré, en particulier il ne possède pas de plus grand élément.

Rappel : On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}$, est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D, x \leq M$.

Principe de récurrence :

Si on se donne une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$, et il se trouve qu'elle est vraie à chaque fois qu'on prend un entier $n \in \mathbb{N}$ au hasard, on se demande si elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par exemple :

$$\mathcal{P}(n) : \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

→ Pour $n = 1$, $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ ($\mathcal{P}(1)$ est vraie)
→ Pour $n = 2$, $1 + 2 = 3 = \dfrac{2(2+1)}{2}$ ($\mathcal{P}(2)$ est vraie)
→ Pour $n = 3$, $1 + 2 + 3 = 6 = \dfrac{3(3+1)}{2}$ ($\mathcal{P}(3)$ est vraie)
→ Pour $n = 4$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \dfrac{4(4+1)}{2}$ ($\mathcal{P}(4)$ est vraie)
⋮

La question qui se pose : existe-il un moyen qui assure que cela va être vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$?
La réponse est positive : c'est le raisonnement par récurrence.

Théorème 3 (Récurrence faible).

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un paramètre n avec $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$(R1)$ $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie; $(R2)$ $\forall n \geq n_0, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$.
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Preuve

Raisonnons par absurde : supposons qu'il existe au moins un entier $m \geq n_0$ tel que $\mathcal{P}(m)$ soit fausse.
Considérons l'ensemble,

$$A = \{k \in \mathbb{N} / (k \geq n_0) \wedge (\mathcal{P}(k) \text{ fausse})\}$$

A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide par hypothèse (car $(m \geq n_0) \wedge (\mathcal{P}(m)$ fausse$)$) donc elle possède un plus petit élément m_0. On a $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (d'après l'hypothèse $(R1)$) et $\mathcal{P}(m_0)$ est fausse, donc $m_0 > n_0$ par suite $m_0 > m_0 - 1 \geq n_0$. Or, $m_0 - 1 \notin A$ (car $m_0 = \min A$), donc $\mathcal{P}(m_0 - 1)$ est vraie. Il en résulte que, d'après $(R2)$, $\mathcal{P}(m_0)$ est vraie puisque $\mathcal{P}(m_0 - 1)$ est vraie. Ce qui contredit la définition de m_0. D'où le résultat c'est-à-dire la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque 2 .

La condition $(R1)$ s'appelle <u>l'initialisation</u> et la condition $(R2)$ s'appelle <u>l'hérédité</u>.

Exemple 24 .

Montrons par récurrence $\forall n \geq 4$, $\left(\mathcal{P}(n) : "n^2 \leq 2^n"\right)$:
$(R1)$ Pour $n = n_0 = 4$, on a $4^2 = 16 \leq 2^4 = 16$. Donc la propriété $P(n_0)$ est vraie.
$(R2)$ Soit $n \geq 4$. Supposons $\left(\mathcal{P}(n) : \forall n^2 \leq 2^n\right)$ et montrons :

$$\mathcal{P}(n+1) : "(n+1)^2 \leq 2^{n+1}"$$

On a $n^2 \leq 2^n$ donc $2n^2 \leq 2^{n+1}$.

$$\text{Or, } (n+1)^2 - 2n^2 = -n^2 + 2n + 1 = -(n-1)^2 + 2 \leq -7 < 0$$

puisque $n \geq 4$. Donc $(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2^{n+1}$ c'est à dire $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi, d'après le théorème précédent (Théorème 3.), $\forall n \geq 4$, $(P(n) :, n^2 \leq 2^n)$ est vraie.

Exemple 25 .

Montrons par récurrence $\forall n \geq 1,\ \left(\mathcal{P}(n) : " \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}"\right)$ **:**

($R1$**) Pour** $n = 1$**, on a** $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$**. Donc la propriété** $P(1)$ **est vraie.**

($R2$**) Soit** $n \geq 1$**. Supposons** $\left(\mathcal{P}(n) : " \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}"\right)$ **et montrons :**

$$\mathcal{P}(n+1) : " \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}"$$

On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + \cdots + n + (n+1) = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$**, donc :**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ **est vraie. D'où :**

$$\forall n \geq 1,\ \left(\mathcal{P}(n) : " \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}"\right)$$

Exemple 26 .

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1,\ \left(\mathcal{P}(n) : " \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} k"\right)$ **:**

($R1$**) Pour** $n = 1$**, on a** $\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1 = (-1)^1 \sum_{k=1}^{1} k$**. Donc la propriété** $P(1)$ **est vraie.**

($R2$**) Soit** $n \geq 1$**. Supposons** $\mathcal{P}(n)$ **et montrons :**

$$\mathcal{P}(n+1) : " \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k"$$

On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2$$

Or d'après le HR : $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} k = (-1)^n \dfrac{n(n+1)}{2}$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n} k + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1}\frac{n+1}{2}\left[-n+2(n+1)\right] \\ &= (-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'où :

$$\forall n \geq 1,\ \left(\mathcal{P}(n) : \text{"} \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} k \text{"}\right)$$

Exemple 27 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$

Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\mathcal{P}(n) : \text{"} u_n = 2^{n-1} \text{"}\right)$:

$(R1)$ Pour $n = 1$, $u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^{1-1}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$(R2)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n) : \text{"} u_n = 2^{n-1} \text{"}$ et montrons $\mathcal{P}(n+1) : \text{"} u_{n+1} = 2^n \text{"}$. On a :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = 2u_n$$

Or d'après le HR, $u_n = 2^{n-1}$ donc :

$$u_{n+1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\mathcal{P}(n) : \text{"} u_n = 2^{n-1} \text{"}\right)$$

Théorème 4 (Récurrence forte).

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un paramètre n avec $n \in \mathbb{N}$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$(R1)$ $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;

$(R3)$ $\forall n \geq n_0,\ ((\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ \mathcal{P}(k)) \implies \mathcal{P}(n+1))$;

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Preuve

Même démonstration que théorème 3.

Exemple 28 (Théorème D'Euclide).

Montrons par récurrence, pour $n \geq 2$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: n est produit de nombres premiers.
$(R1)$ 2 est produit de lui même et 2 est premier, donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
$(R3)$ Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $2 \leq k \leq n$ et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$: Si $n+1$ est déjà un nombre premier, il est alors produit de lui-même (rien à démontrer donc). Sinon, il existe deux entiers a et b vérifiant $2 \leq a, b \leq n$ et $n+1 = a \times b$. D'après l'hypothèse $(R3)$, a et b sont produits de nombres premiers, donc $n+1$ l'est aussi. D'où pour tout n supérieur ou égal à 2, n est produit de nombres premiers.

Exemple 29 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$

Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\mathcal{P}(n) : "u_n = 2^{n-1}"\right)$:
$(R1)$ Pour $n = 1$, $u_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^{1-1}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
$(R3)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathcal{P}(k) : "u_k = 2^{k-1}"$$

et montrons $\mathcal{P}(n+1) : "u_{n+1} = 2^n"$. On a :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Or d'après le HR, $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathcal{P}(k) : "u_k = 2^{k-1}"$ donc :

$$u_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + 2^n - 1 = 2^n$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\mathcal{P}(n) : "u_n = 2^{n-1}"\right)$$

Exemple 30 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \end{cases}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n) : "u_n = 1")$:

$(R1)$ Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$(R3)$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathcal{P}(k) : "u_k = 1"$$

et montrons que $\mathcal{P}(n+1) : "u_{n+1} = 1"$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k^2$$

Or d'après le HR, $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k = 1$ donc :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n) : "u_n = 1")$$

Théorème 5 (Récurrence finie).

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un paramètre n avec $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$(R1)$ $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ; $(R4)$ Pour un certain n vérifiant $n_0 \leq n \leq n_1 - 1$, $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$.
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n vérifiant $n_0 \leq n \leq n_1$.

Preuve

Même démonstration que théorème 3.

Remarque 3 .

Dans l'exemple suivant nous allons utiliser les nombres premiers, c'est pourquoi on rappelle ici deux de leurs propriétés.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$.

- ☞ p est premier si et seulement si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{Z}$ sont $-p, -1, 1, p$.
- ☞ p est premier si et seulement si

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ (p/ab \implies (p/a) \vee (p/b))$$

Exemple 31 .

Soit p un nombre premier. Montrons par récurrence sur k que :

$$\forall k \in \{1, \cdots, p-1\}, p/C_p^k \quad \left(C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}\right)$$

→ $(R1)$ Pour $k = 1$, $C_p^1 = p$ qui est divisible par p.

→ $(R4)$ Soit $k \in \{1, \cdots, p-2\}$, supposons que p/C_p^k. Montrons que p/C_p^{k+1}, on a :

$$C_p^{k+1} = \frac{p!}{(k+1)!(p-(k+1))!} = \frac{p-k}{k+1}\frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p-k}{k+1}C_p^k \quad \Leftrightarrow \quad (k+1)C_p^{k+1} = (p-k)C_p^k$$

Comme par hypothèse p/C_p^k alors $p/(k+1)C_p^{k+1}$. Or, p ne divise pas $k+1$ et p premier donc p divise C_p^{k+1}. D'où, d'après le théorème 5., $\forall k \in \{1, \cdots, p-1\}, p/C_p^k$.

Théorème 6 (Récurrence multiple).

Soient $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$(R5)$ $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \cdots, \mathcal{P}(n_0+q-1)$ sont toutes vraies ;
$(R6)$ $\forall n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \cdots, \mathcal{P}(n+q-1)$ vraies $\implies \mathcal{P}(n+q)$ vraie) ;
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n vérifiant $n \geq n_0$.

Preuve

Démonstration par l'absurde : Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $m > n_0$ et $\mathcal{P}(m)$ est fausse. Considérons alors l'ensemble,

$$A = \{n \in \mathbb{N} / (n > n_0) \wedge (\mathcal{P}(n) \text{ fausse })\}$$

A est une partie non vide (puisque $m \in A$) de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément m_0. On a alors $\mathcal{P}(m_0)$ est fausse donc $m_0 \notin \{n_0, n_0+1, \cdots, n_0+q\}$ (car d'après $(R5)$ $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \cdots, \mathcal{P}(n_0+q-1)$ sont toutes vraies) donc $m_0 > n_0 + q - 1$. On a alors

$$m_0 - 1, m_0 - 2, \cdots, m_0 - q + 1, m_0 - q \notin A \text{ et } \forall n \in \{m_0 - q, m_0 - q + 1, m_0 - q + 1, \cdots, m_0 - 2, m_0 - 1\}, n \geq n_0$$

donc $\mathcal{P}(m_0 - q + 1), \mathcal{P}(m_0 - q + 1), \mathcal{P}(m_0 - q + 2), \cdots \mathcal{P}(m_0 - 2), \mathcal{P}(m_0 - 1)$ sont toutes vraies. On applique alors $(R6)$ aux q propriétés $\mathcal{P}(m_0 - q), \mathcal{P}(m_0 - q + 1), \cdots \mathcal{P}(m_0 - 2), \mathcal{P}(m_0 - 1)$ pour obtenir $\mathcal{P}(m_0)$ est vraie, ce qui contredit la définition de m_0. D'où, l'hypothèse de départ est fausse. Par conséquent, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n vérifiant $n \geq n_0$.

Exemple 32 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Montrons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 2^n + 1$". On a,
→ $(R5)$ $\mathcal{P}(0)$: "$u_0 = 2 = 2^0 + 1$" vraie et $\mathcal{P}(1)$: "$u_1 = 3 = 2^1 + 1$" vraie.
→ $(R6)$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $(\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 2^n + 1$") et $\big(\mathcal{P}(n+1)$: "$u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$"$\big)$ sont vraies et montrons $\big(\mathcal{P}(n+2)$: "$u_{n+2} = 2^{n+2} + 1$"$\big)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) \\ &= 3.2^{n+1} + 3 - 2.2^n - 2 \\ &= 3.2^{n+1} + 1 - 2^{n+1} \\ &= 2.2^{n+1} + 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

D'où $(\mathcal{P}(n+2) : u_{n+2} = 2^{n+2} + 1)$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$.

Théorème 7 (Récurrence partielle).

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Si on a,
$(R1)$ $\mathcal{P}(1)$ est vraie ;
$(R7)$ $\forall n \in \mathbb{N}, n = 2^k (k \in \mathbb{N}^*)$, $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(2n))$;
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour toute puissance entière de 2.

Preuve

Démonstration par l'absurde : Supposons qu'il existe $l \geq 1$ tel $\mathcal{P}(m)$ ne soit pas vraie avec $m = 2^l$. Considérons l'ensemble

$$A = \{k \in \mathbb{N} / k \geq 1 \text{ et } \mathcal{P}(2^k) \text{ fausse } \}$$

A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (puisque $l \in A$), donc A admet plus petit élément k_0. On a alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 2^{k_0 - 1}$. D'autre part, d'après $(R7)$, $\mathcal{P}(2n)$ est vraie c'est à dire que $\mathcal{P}(2^{k_0})$ est vraie. Or, $k_0 \in A$ donc $\mathcal{P}(2^{k_0})$ est fausse. Ce qui est absurde. D'où, l'hypothèse de départ est fausse et par suite $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour toute puissance entière de 2.

Théorème 8 (Récurrence descendante).

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Si on a,
$(R8)$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie sur un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$;

$(R9)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n-1))$;
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Preuve

Remarquons que $(R9)$ peut être formuler autrement,

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies (\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathcal{P}(n-k)))$$

Ceci est obtenu sans problème en faisant une récurrence finie sur k : En effet, Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie et considérons $(R9)$ et montrons que $\forall k \in [0, n] \cap \mathbb{N}, \mathcal{P}(n-k)$ est vraie.
→ $(R1)$ Pour $k = 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie ;
→ $(R4)$ Soit $k \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n-k)$ soit vraie et montrons que $\mathcal{P}(n-(k+1))$ est vraie. D'après $(R9)$, $\mathcal{P}(n-(k+1))$ est vraie. D'où la formulation $(*)$ de $(R9)$.
Démonstration par absurde du théorème 8. : Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in A$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie et supposons qu'il existe m de $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(m)$ soit fausse. Comme A est infini alors il existe l de A tel que $l \geq m$.

Exemple 33 (Utilisation de la récurrence partielle et descendante). d'après $(R9)$ on aura $\mathcal{P}(l-k)$ est vraie c'est à

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n) : \forall x_1, x_2, \cdots, x_n > 0, \quad \overbrace{(x_1.x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}^{\text{Moyenne géométrique}} \leq \overbrace{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}^{\text{Moyenne arithmétique}}$$

➽ Étape 1 : Montrons, en utilisant la récurrence partielle, que tout d'abord que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n de la forme $n = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$:

→ $(R1)$ Pour $n = 2^0 = 1$: $(x_1 = x_1^{\frac{1}{1}} \leq \frac{x_1}{1} = x_1)$ $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Pour $n = 2^1 = 2$: soit $x_1, x_2 > 0$. On a :

$$\frac{(x_1 - x_2)^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4} \geq x_1x_2$$

donc $\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \geq x_1x_2$ donc $(x_1.x_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$. D'où $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

→ $(R7)$ Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie avec $n = 2^k$, montrons alors que $\mathcal{P}(2n)$ est vraie. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ des réels positifs, on a

$$(x_1x_2 \cdots x_nx_{n+1} \cdots x_{2n-1}x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = [(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}(x_{n+1} \cdots x_{2n})^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{2}}$$

On applique $\mathcal{P}(2)$ pour $y_1 = (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ et $y_2 = (x_{n+1} \cdots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$, donc :

$$(y_1.y_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad [(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}(x_{n+1} \cdots x_{2n})^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{2}} + (x_{n+1} \cdots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}{2}$$

D'autre part, d'après $(R7)$ appliquée à $x_1, \cdots, x_n$ et à $x_{n+1}, \cdots, x_{2n}$, on a :

$$(x_1.x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ et } (x_{n+1} \cdots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}$$

Donc :

$$[(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}(x_{n+1}\cdots x_{2n})^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{2}}+(x_{n+1}\cdots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}{2} \leq \frac{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{2n}}{n}}{2}$$

Donc :

$$(x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}\cdots x_{2n-1}x_{2n})^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2n}$$

D'où $\mathcal{P}(2n)$. Par conséquent, $\forall n=2^k\ (k\in\mathbb{N}), \forall x_1,x_2,\cdots,x_n>0,\ (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$

➽ **Étape 2 : Montrons, en utilisant la récurrence descendante (puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie sur l'ensemble $A=\{2^k/k\in\mathbb{N}\}$ qui est infini), que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$:**

→ **$(R8)$ La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie sur A qui est une partie de $\mathbb{N}$ infinie.**

→ **$(R9)$ Supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n\geq 2$ et montrons que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie :**
Soit des réels $x_1,\cdots,x_{n-1}>0$. Posons $z=\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$. $(R9)$ appliquée aux n éléments $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},z$ donne :

$$(x_1x_2\cdots x_{n-1}z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+z}{n} = \frac{(n-1)z+z}{n} = z$$

Donc $(x_1x_2\cdots x_{n-1}z)\leq z^n$, donc $(x_1x_2\cdots x_{n-1})\leq z^{n-1}$. D'où :

$$(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$$

Ainsi, on a montré $\mathcal{P}(n-1)$.

Conclusion :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x_1,x_2,\cdots,x_n>0,\ (x_1.x_2\cdots x_n)^n \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$